

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЦИ ЗА МАТУРСКИ ИСПИТ ШКОЛСКЕ 2018/2019.ГОДИНЕ

1. Упростити израз:

$$\left(\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{a + 1} : \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} \right) : \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{a^2 + a}$$

2. Упростити израз:

$$\left(\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a-b}{b-a}} + \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} \right) : \frac{1 - \frac{a-3b}{a+b}}{\frac{3a+b}{a-b} - 3}$$

3. За $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ упростити израз:

$$\left(\frac{3}{x^3 - 3x^2 + 9x} - \frac{6-x}{x^3 + 27} \right) \cdot \frac{x^3 - 9x}{x^2 + 9} + \frac{18}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27}$$

4. Израчунати вредност израза:

$$\left[\frac{1}{4} : \left(1 + \frac{7}{9} \right) + 0,25 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{1}{5} - 1 \right)^2} + \left(\frac{20}{9} \right)^{-1} \right]$$

5. Израчунати вредност израза:

$$\frac{(2 + \sqrt{3}) \cdot 64^{(-2)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{(-1)^3}}{(2 - \sqrt{3})^{-1} \cdot 64^{-2-2} \cdot \sqrt[4]{(-8)^4}}$$

6. Израчунати вредност израза

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

за $a = 0,02, b = -11,05, c = 1,07$.

7. Израчунати вредност израза

$$\left(\frac{\frac{4}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} : \frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{4}{b(abc + a + c)}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

за $a = \sqrt[3]{5,32}, b = \sqrt[4]{1,005}, c = 7,04$.

8. Упростити израз

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}$$

па израчунати његову вредност за $a = 1, b = \frac{3}{5}$.

9. Упростити израз

$$1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{a^2-1}}{(a-1) \cdot \sqrt{a+1} - (a+1) \cdot \sqrt{a-1}}, a > 1$$

10. Израчунати

$$\frac{1 - \frac{1}{(m+x)^2}}{\left(1 - \frac{1}{m+x} \right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1 - (m^2 + x^2)}{2mx} \right)$$

ако је $x = \frac{1}{m-1}, m \neq 1$.

11. Раставити на просте чиниоце следећи полином:

$$x^2y^2(x - y) + z^2y^2(y - z) + z^2x^2(z - x)$$

12. Скратити разломак:

$$\frac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}$$

13. Скратити разломак:

$$\frac{8a^{n+2} + a^{n-1}}{16a^{n+4} + 4a^{n+2} + a^n}$$

14. На школској табли су написани сви природни бројеви мањи од 500. Један ученик је најпре избрисао све бројеве који се завршавају цифром 0. После је други ученик избрисао све бројеве који су дељиви са 4, а затим је трећи ученик избрисао бројеве дељиве са 6. Колико је бројева остало на табли.

15. Ако полином $p(x)$ при дељењу са $x - 1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x + 1$ остатак 1, наћи остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x^2 - 1$.

16. Ако је полином $P(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 - x^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$ дељив полиномом $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, наћи вредност израза $a^2 - b^2 + c^2$.

17. Решити једначину $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$.

18. Одредити m тако да решења једначине $3x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ задовољавају услов $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = 64$.

19. Одредити вредности реалног параметра m за које су решења једначине $x^2 + 2x + m + 3 = 0$ негативна.

20. Одредити p тако да за свако реално x важи: $(p - 2)x^2 - 2px + 2p - 3 < 0$.

21. Дата је квадратна функција $y = (k - 2)x^2 - 2kx + 2k - 3$ где је k реалан параметар.

a) За које вредности k је функција негативна за свако x ?

b) Одредити вредност параметра k тако да је збир реципрочних вредности квадрата нула функције једнак 2

22. Не решавајући квадратну једначину $x^2 - x + m = 0$ одредити m тако да њена решења задовољавају услов $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

23. Једно решење једначине $x^3 - 6x^2 + ax - 6 = 0$ је 3. Наћи збир квадрата свих решења једначине.

24. Одредити комплексан број z за који важи: $(z + i)(1 + 2i) + (1 + zi)(3 - 4i) = 1 + 7i$.

25. Дати су комплексни бројеви $z_1 = 2017 + 2018i$, $z_2 = 2018 + 2019i$ и $w = (z_2 - z_1)^{-2020} \left(\frac{\bar{z}_1 + 1}{2018}\right)^{2021}$, где је \bar{z}_1 коњуговано-комплексни број броја z_1 и $i^2 = -1$. Одредити $|w|$.

26. Нека је z комплексан број за који важи $\frac{\sqrt{2}}{z+i} = -|z|$. Израчунати $2z - \bar{z}$.

27. Наћи имагинарни део комплексног броја $\frac{(1-i)^{2019}}{2-4i}$, ($i^2 = -1$).

28. Ако је $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{11}$, где је $i^2 = -1$ наћи вредност израза $z + \bar{z}$.

29. Ако је $k \in R$, $i^2 = -1$, одредити k за које је модуо комплексног броја

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015} + \frac{-1+5ki}{3i} - 1$$

најмањи.

30. Решити једначину: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

31. Решити једначину: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

32. Решити једначину: $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

33. Ако за реалне бројеве x и y важи $7 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^y = 23$ и $2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 42$, израчунати $x + y$.

34. Решити једначину: $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$.

35. Решити једначину: $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$.

36. Решити једначину: $\frac{1}{\log_6(x+3)} + \frac{2 \log_{0.25}(4-x)}{\log_2(x+3)} = 1$.

37. Решити једначину: $4^{\log_5 x^2} - 4^{\log_5 x+1} + 4^{\log_5 x-1} = 1$.
38. Решити неједначину: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.
39. Решити неједначину: $\log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1$.
40. Решити неједначину: $\log_{\frac{1}{2}}(3x^2 + 7x + 4) < \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + 7)$.
41. Решити систем једначина:
- $$\begin{aligned} \log(x^2 + y^2) + 1 &= \log 13 \\ \log(x + y) - \log(x - y) &= 3 \log 2 \end{aligned}$$
42. Решити систем једначина:
- $$\begin{aligned} \frac{\log(x - y) - 2 \log 2}{1 - \log(x + y)} &= 1 \\ \frac{\log x - \log 3}{\log y - \log 7} &= -1 \end{aligned}$$
43. Решити једначину: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1$.
44. Решити једначину: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} = 3$.
45. Решити једначину: $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$.
46. Решити једначину: $\sqrt{x-2 + \sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2 + 3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.
47. Решити неједначину: $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$.
48. Израчунати вредност израза: $\frac{\cos 100^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 200^\circ}$.
49. Доказати да је $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.
50. Упростити израз:
- $$\frac{\sin(270^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ - \beta)}{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) \cos(180^\circ - \alpha)} + \frac{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \sin(\gamma - 90^\circ)}{\cos(180^\circ - \gamma) \operatorname{tg}(-\alpha)}$$
51. Упростити израз:
- $$\frac{\sin 130^\circ \cos 330^\circ \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) \operatorname{ctg} 225^\circ}{\sin 270^\circ \cos 220^\circ \operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)}$$
52. Израчунати вредност израза:
- $$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$$
53. Ако је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ при чему је $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, доказати да је $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.
54. Решити једначину: $4 \sin^2 x \cos x - 4 \sin^3 x + 3 \sin x - \cos x = 0$.
55. Наћи збир свих решења једначине $\cos(\frac{\pi}{4} + x) - \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}(2 \cos^2 x - 1)$ која припадају интервалу $(0, 2\pi)$.
56. Одредити решења једначине: $(\frac{2}{3})^{\sin^2 x - \cos^2 x} + (\frac{2}{3})^{\cos 2x} = \frac{13}{6}$ у интервалу $[0, 2\pi]$.
57. Решити једначину: $5(\sin x + \cos x)^2 + 7 = 12 \sin x + 12 \cos x$.
58. Решити једначину: $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$.
59. Доказати следеће тврђење: ако је у правоуглом троуглу један угао 15° , тада је полупречник описаног круга троугла једнак геометријској средини катета.
60. Дат је троугао са страницама $AB = \sqrt{2}$ цм и $AC = \sqrt{3}$ цм. Нека је тачка D на страници BC , тако да је $\angle BAD = 30^\circ$ и $\angle CAD = 45^\circ$. Израчунај дужину дужи AD (у цм)?
61. Дужина странице AB троугла ABC је $2\sqrt{6}$ цм, а унутрашњи угао наспрам те странице је 60° . Ако је површина тог троугла једнака $\sqrt{3}$ цм², наћи збир дужина страница AC и BC .
62. Ако за дијагонала ромба важи једнакост $d_1 = (2 - \sqrt{3})d_2$ наћи оштар угао ромба.
63. Кружница пролази кроз крајње тачке једне странице квадрата и кроз средиште наспрамне странице. Ако је страница квадрата дужине a , одредити пречник кружнице.
64. Дијагонала квадра има дужину 13 цм, а дијагонала бочних страна $4\sqrt{10}$ цм и $3\sqrt{17}$ цм. Израчунати запремину квадра.

65. Запремина квадра је 2080cm^3 , површина 996cm^2 , а обим основе 58cm . Колике су дужине основних ивица квадра.
66. Површина дијагоналног пресека правилне четворостране пирамиде је 12cm^2 , а основна ивица $a = 6\text{cm}$. Израчунати површину пирамиде.
67. У правој купи угао између изводнице и висине је 60° , а изводница је за 2cm дужа од висине. Колика је запремина те купе?
68. Прав ваљак и права купа имају заједничку основу. Врх купе је центар друге основе ваљка. Ако је однос висине ваљка и изводнице купе једнак $4:5$ наћи однос површина ваљка и купе.
69. У једнакостранични троугао странице a уписан је квадрат. Обе фигуре ротирају око висине троугла, заједничке симетрале. Одредити размеру запремина тела добијених ротацијом квадрата и троугла.
70. Дат је круг $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ и тачка А са координатама $(5,-6)$. Ако је В тачка круга најудаљенија од тачке А наћи дужину дужи АВ.
71. Наћи растојање центра кружнице $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$ од пресечне тачке правих $2x - 3y - 5 = 0$ и $5x + y - 4 = 0$.
72. Наћи полупречник r круга са центром у тачки $C(3, -1)$ који на прави $2x - 5y + 18 = 0$ одсеца тетиву дужине 28 .
73. Наћи једначину круга који додирује обе координатне осе и пролази кроз тачку $M(2,1)$.
74. Дата је парабола $y^2 = 4x$ и права $x + 2y - 3 = 0$.
- а) Наћи једначину праве која пролази кроз жижу дате параболе и нормална је на дату праву.
- б) Наћи координате пресечних тачака добијене праве и дате параболе.
75. Хипербола је дата једначином $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Растојање од жиже до координатног почетка је $\sqrt{5}$, а права $x + y + 1 = 0$ је тангента дате хиперболе. Наћи a и b , тј. одредити једначину хиперболе.
76. Решити систем једначина над пољем R , за разне вредности реалног параметра a .

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ax_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\6x_1 + (a + 2)x_2 + 2x_3 &= 13\end{aligned}$$

77. Ако бројеви a, b, c чине аритметичку прогресију доказати да то важи и за $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
78. У аритметичком низу први, пети и једанаести члан образују геометријски низ. Ако је први члан 24 , одредити десети члан аритметичког низа.
79. Ако сваки од четири броја који чине аритметичку прогресију увећамо редом за $5, 6, 9$ и 15 добићемо геометријску прогресију. Наћи те бројеве.
80. На дужи $AB = 195\text{cm}$ наћи тачке С и D тако да дужине добијених делова чине геометријски низ и $BD = AC + 120\text{cm}$.
81. Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним местима износи 85 , а збир чланова на парним местима износи 170 . Одредити количник прогресије.
82. Ако је $f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}$, где је $x \in R \setminus \{-2, 1\}$, одредити $f(x - 1)$.
83. Одредити извод функције $y = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$.
84. Наћи y'' ако је $y = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.
85. Дата је функција $f(x) = x - \sin \pi x \cdot \cos \pi x + \frac{\ln 2x}{x} + e^{\text{tg } 2\pi x}$. Наћи вредност $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
86. Израчунати граничну вредност:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \cdot \text{tg } x) - \ln(\cos x)}{x^2}$$

87. Израчунати граничну вредност:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - 3x} - 2}{1 + \sqrt[3]{2x} - 1}$$

88. Израчунати граничну вредност:

$$\lim_{x \rightarrow 5\pi} \frac{\left(e^{-\frac{1}{(5\pi-x)^2}} + \sqrt{3\pi} \right) \cdot \log_2 \frac{x+3\pi}{2\pi}}{(\sqrt{6x-5\pi} - 2\sqrt{\pi}) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{3} \right)}.$$

89. Написати једначине тангенте и нормале криве $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ у тачки у којој је тангента нормална на праву $2x + y + 5 = 0$.

90. Наћи асимптоте функције $y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$.

91. Одредити домен, испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције:

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

92. Одредити домен, испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције: $y = \frac{e^x}{x^2 - 8}$.

93. Одредити домен, испитати конвексност и наћи превојне тачке функције: $y = \frac{1+x^2}{e^{x^2}}$.

94. Дата је функција $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Наћи x за које функција f достиже максимум.

95. Израчунати: $\int \frac{7x-4}{2x^2-3x-2} dx$.

96. Израчунати: $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

97. Израчунати интеграл: $\int \frac{\sin 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x - \frac{1}{4}} dx$.

98. Методом парцијалне интеграције израчунати: $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$.

99. Методом парцијалне интеграције израчунати: $\int e^{-x} \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$.

100. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око осе O_x равне површи ограничене линијама $y^2 = 8x$ и $y = x^2$.

101. Израчунати површину омотача обртног тела које настаје ротацијом датог лука $y = \ln(\sqrt{x^2-1}) - x$, $x \in [-2, -1]$ око осе O_x .

102. Израчунати површину површи ограничену линијама $y = x^3$, $y = 4x$.

103. Одредити коефицијент уз x^7 у развоју $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} \right)^8$.

104. У развоју бинома $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x} \right)^n$, $x \neq 0, n \in \mathbb{N}$ одредити члан који не садржи x ако је биномни коефицијент трећег члана већи за 5 од биномног коефицијента другог члана.

105. Трећи члан у развоју бинома $\left(2x + \frac{1}{x^2} \right)^m$, $x \neq 0, m \in \mathbb{N}$ не садржи x . Одредити све вредности x тако да тај члан буде једнак другом члану у развоју $(1+x^3)^{30}$.

Јелена Потпара